26-02-2018

$(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Δημιουργούμε την ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$S_1=\alpha_1$, $S_2=\alpha_1+\alpha_2$, $S_3=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, $S_n=\alpha_1+\dots+\alpha_n$

$\alpha_k=(-1)^k,\ k\in\mathbb{N}$

$S_1=(-1)^1=-1$
$S_2=\alpha_1+\alpha_2=-1+(-1)^2=-1+1=0$
$S_3=0+(-1)^3=-1$
$S_4=S_3+\alpha_4=-1+(-1)^4=-1+1=0$
γενικά $S_n=S_{n-1}+\alpha_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \ ,\ n\in\mathbb{N}$$

- Ορισμός: Αν $\lim S_n$ $\exists$ και ισούται με $l\in\mathbb{R}$ λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει στο l, και γράφουμε:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k=l=\lim_n\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=\lim_n S_n$$

- Ορισμός: Αν $\lim S_n=\lim\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=+\infty$ τότε λέμε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$, και γράφουμε: $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k=+\infty$
(παρόμοια για $-\infty$)

$S_n=\sum_{K=1}^{n}\alpha_k$ n-οστό μερικό άθροισμα,

α_k : K-οστός όρος της σειράς

Το όριο $\lim_n S_n \nexists$ τότε λέμε ότι η σειρά αποκλίνει.

$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Δημιουργούμε την σειρά: $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$
$k_0 \in \mathbb{N}$

$S_n = \sum_{k=k_0}^{n} a_k \quad n \geq k_0 \qquad S_{k_0} = a_{k_0}$
$S_{k_0+1} = S_{k_0} + a_{k_0+1}$,

Πρόταση: Δίνονται οι συγκλίνουσες σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Δίνεται $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ συγκλίνει

$\left(= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$

Απόδειξη:
Δημιουργούμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της νέας σειράς

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k = \lambda S_n + \mu b_n$$

Εφόσον η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\exists \lim S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$\exists \lim b_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Άρα $\exists \lim U_n = \lambda \lim S_n + \mu \lim b_n$
$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Scanned by CamScanner

$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Πρόταση: Η σειρά $\sum_{K=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

$S_n = \sum_{K=1}^{n} a_k$ n-οστό της $\sum_{K=1}^{\infty} a_k$

$t_n = \sum_{K=k_0}^{n+k_0-1} a_k$ n-οστό της $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{k_0-1})+t_n = S_{n+k_0-1} = \sum_{k=1}^{n+k_0-1} a_k$$

Άρα η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \exists \lim t_n = t =$

$= \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k$

Αποδ. ότι: $t_n+(a_1+\ldots+a_{k_0-1}) = S_{n+k_0-1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t_n+(a_1+\ldots+a_{k_0-1}) = S_{n+k_0-1}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \lim_n S_{n+k_0-1} \Leftrightarrow \exists \lim_n S_n$.

Παίρνουμε το όριο $k\to\infty$
$$(a_1+\ldots+a_{k_0-1})+\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $k_0\in\mathbb{N}$ σταθεροποιούμε:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ συγκλίνει}$$

$$\boxed{P_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}}$$

Άρα $(a_1+a_2+\ldots+a_{k_0-1})+\sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$\lim a_{k+k_0} = \lim a_n$

$(a_1+\ldots+a_{k_0-1}) + \sum_{k=k_0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \ , \ n \geq k_0$

για $k_0 = n$

$$\underbrace{(a_1+\ldots+a_{k-1})}_{S_{n-1}} + \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}_{P_n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$S_{n-1} + P_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim S_n$

$S_{n-1} + P_n = S = \lim S_n$

$P_n = S - S_{n-1} \to S - S = 0$

Άρα $P_n \to 0$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n > n_0 \ |P_n| < \varepsilon$

Πρόταση: Θεωρούμε $\sum_{k=1} a_k$ για την οποία αποδείξαμε ότι συγκλίνει $\Rightarrow a_k \to 0$ $\left(\begin{matrix} a_k \to 0 \\ k \to \infty \end{matrix}\right)$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \quad a_k = (-1)^k \not\to 0$

Αποδ: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \to S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$S \qquad S$

$\alpha_n = 0$

$\alpha_n \to 0$

Πρόταση: Θεωρούμε $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$
$\alpha_k = b_k, \forall k \geq k_0$

Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει

$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ άρα $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$$

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Να μελετηθεί ως προς την σύγκλιση για διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

Αποδ.: $x=1$

$\alpha_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n \to +\infty$

$\to \sum_{k\geq 0} x^k$ αποκλίνει στο $+\infty$ για $x=1$.

Για $x=-1$ $\sum_{k\geq 0}^{\infty} (-1)^k$ αποκλίνει $S_{2n} = 0$

$S_{2n+1} = -1$

και στις 2 περιπτώσεις $|\alpha_k| = 1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_k \not\to 0$

$|x|=1$

$|x|>1$

$|a_k| = |x^k| = |x|^k \to +\infty$

$|x|<1$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$\lim S_n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$(x \neq 1$, αφού $|x|<1)$ $\frac{1}{1-x} = \lim S_n = \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right| = \frac{1}{2^k} \to 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = ; \qquad a_k = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = b_k - b_{k+1}, \quad b_k = \frac{1}{k}$$

$$(b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \cancel{\dots} + (\cancel{b_n} - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = b_1 - b_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = S_{n+1} \to 1.$$

$\sum a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$, $S_n = b_1 - b_{n+1}$

Πρόταση: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) = N_\varepsilon \in \mathbb{N}) : (\forall n > m \geq N) : \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

$\Leftrightarrow$ η $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, συγκλίνει $\Leftrightarrow$ S_n είναι $\hookrightarrow$ Cauchy.

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N}) : n_0 < n, n_0 < m \ |S_n - S_m| < \varepsilon$

$$\varepsilon > |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

$n \geq m+1$ χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Μελετάμε την σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, $a_k = \frac{1}{k}$.

Έστω ότι συγκλίνει $\varepsilon_n = \frac{1}{4} > 0$

$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > m \geq N) \ \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right| < \varepsilon$

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{(n-m)}{n} = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} \to 1 - 0$$

$1 \leq \varepsilon$ Άτοπο αφού: $\varepsilon = \frac{1}{4}$ που υποθέσαμε.